数理解析研究所講究録
875巻 1994年 11-22

巾零リー群と偏微分方程式

京大・理　大鍛治　隆司 (Takashi Ōkaji)

§1　Introduction

リー群と偏微分方程式との関係については長い歴史があるが、近年特に巾零リー群との関係が注目されだしたのは、1977年に発表されたRothschild-Steinの論文が端緒である。彼らは$\mathbb{R}^n$上の実ベクトル場の平方の和で書ける2階作用素の解の精密な評価を求める為に、Liftingと呼ばれる独創的な手段を開発した。これにより、一般のベクトル場がHörmanderの条件(後に$(CH)_r$として述べる)を満たす時、ダミー変数を増やせば、$\mathbb{R}^{n+d}$上のベクトル場としてある巾零リー群上の左不変ベクトル場で近似出来ることがわかった。従ってベクトル場(より正確にはベクトル場の族)から生成される偏微分作用素を研究するにあたり、まず巾零リー群上の左不変ベクトル場から生成される作用素について研究し、後に一般の作用素についてそれの近似として取り扱うという図式が成り

立つ。本講演では、これをまず準楕円性の研究について概観し、後に初期値問題に適用してみたい。その前にLifting theoremをきちんと述べよう。

Ωを$\mathbb{R}^n$の開集合，$\{X_j\}_{1\le j\le p}$をΩ上の実ベクトル場の族で係数はすべてsmoothとする．多重指数 $I=(i_1,\cdots,i_N)\in\{1,2,\cdots,p\}^N$に対し、その長さ$|I|=N$とし，$[X,Y]=XY-YX$ に対し．

$|I|\ge 2$， $ad_I(X)=[X_{i_1},[X_{i_2},\cdots\cdots,X_{i_N}]\cdots]$

$|I|=1$ $\quad ad_I(X)=X_{i_1}$

と定義する． 自然数rに対して，$\{X_j\}_{1\le j\le p}$がHörmanderの条件$(CH)_r$をみたすと言うのは，Ωの各点xで

$$\mathrm{span}\{ad_I(X),\ |I|\le r\}=T_x(\Omega)\quad(\text{接空間})$$

が成り立つ事であるとする。(注この条件の下に1967年彼は，$L=\sum_{j=1}^{p-1}X_j^2+X_p$ が準楕円性を持つ事を示した。)

<u>Lifting Theorem</u> $\{X_j\}_{1\le j\le p}$は$(CH)_r$をみたすと仮定する．この時新しい変数 $(t_1,\cdots,t_q)\in\mathbb{R}^q$と適当な実smooth函数 $a_{jk}(x,t)$，${}_{1\le j\le p,\ 1\le k\le q}$を選べば，次の条件を満足させることが出来る．

以下必要ならばΩを適当にshrinkさせる事にして，

(1) $\tilde{X}_j=X_j+\sum_{k=1}^{q}a_{jk}(x,t)\frac{\partial}{\partial t_k}\quad(1\le j\le p)$

は$\tilde{\Omega}=\Omega\times V$で$(CH)_r$をみたす。但し$V$は$0\in\mathbb{R}^q$の$^{\exists}$近傍．

(2) $\{\tilde{X}_j\}_{1\le j\le p}$は"free up to step r"，即ち $n+q=\dim\mathcal{F}_{r,p}$

但し，$\mathcal{F}_{r,p}$はp個の生成元を持つstep rのFree Nilpotent Lie Algebra.

(3) ある C^∞-map $\Theta(\tilde{x},\tilde{y}):\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}\longrightarrow F_{r,p}$ が存在して，
$^\forall\tilde{x}\in\tilde{\Omega}$ に対し，$\Theta_{\tilde{x}}:\tilde{y}\longmapsto\Theta(\tilde{x},\tilde{y})$ は $\tilde{\Omega}$ の$^\exists$sub近傍から
$F_{r,p}$ の単位元の近傍への C^∞-diffeomorphism であり，
$\tilde{X}_j$ の $\Theta_{\tilde{x}}$ による像を $\tilde{X}_{j,\tilde{x}}$ と書けば

$$\tilde{X}_{j,\tilde{x}} = \hat{X}_{j,\tilde{x}} + R_{j,\tilde{x}}$$

と分解されて，$\hat{X}_{j,\tilde{x}}$ は Free Nilpotent Lie群 $F_{r,p}$ $(=\exp\mathfrak{F}_{r,p})$ 上の左不変ベクトル場，$R_{j,\tilde{x}}=\sum_\alpha a_\alpha^j(u)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^\alpha$ はその係数を

$a_\alpha^j(u)\cong\sum \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cap}{a_{\alpha\beta}^j}}\, u^\beta$ (形式的にTaylor展開すれば) とした時
$a_{\alpha\beta}^j\neq 0$ に対して $|\beta|-|\alpha|\leq 0$ が成立する.

§2 準楕円性

Ωで定義された偏微分作用素Lが準楕円性を持つとは，

$$^\forall u\in\mathcal{D}'(\Omega),\ {}^\forall\omega\subset\Omega \text{ open},\ Lu\in C^\infty(\omega)\Longrightarrow u\in C^\infty(\omega)$$

が成り立つ時をいう。まず巾零リー群上の結果を述べよう。

$\mathfrak{g}$ を graded Lie algebra: i.e. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r$, s.t.

$$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_{i+j}\quad(i+j\leq r)$$
$$=0\quad(i+j>r).$$

さらに $\mathfrak{g}$ は stratified: i.e. $\mathfrak{g}_1$ が $\mathfrak{g}$ を生成する. [$(CH)_r$ に相当]
と仮定する. G を $\mathfrak{g}$ に附随した simply connected Lie群，$\hat{G}$ を G の既約ユニタリ表現全体の集合とする. さらに $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra, $\mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ をその中で dilation $\delta_t(X)=t^jX$, $X\in\mathfrak{g}_j$

$t>0$ に関して homogeneous degree m のものを表わすとする。この時次の結果が成り立つ。

<u>Theorem</u> (Helffer & Nourigat, 1979)

$P \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ i.e. $P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha X^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $X^\alpha = X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_N}$, $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_1$ に対し、次の3条件は同値である。

(1) P は準楕円性を持つ。

(2) $\forall \pi \in \hat{G} \setminus \{0\}$, $\pi(P)$ は空間 $\mathcal{S}_\pi$ で単射である。

但し $\mathcal{S}_\pi$ は π の C^∞-vector 全体 i.e. $\mathcal{S}_\pi = \{ u \in \mathcal{H}_\pi : \pi(g)u : \underset{g}{\overset{G}{\downarrow}} \mapsto \mathcal{H}_\pi\ C^\infty_{\text{map}} \}$

(3) $\forall Q \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$, $\exists C_Q$ s.t.

$$\|\pi(Q)u\|^2 \leq C_Q \|\pi(P)u\|^2 \qquad \forall u \in \mathcal{S}_\pi,\ \forall \pi \in \hat{G}.$$

ここで次の事に注意しておく, $Xf(x) = \frac{d}{dt} f(x e^{tX})\big|_{t=0}$, $f \in C^\infty(G)$.
$\pi(X)f = \frac{d}{dt} \pi(e^{tX}) f \big|_{t=0}$, $f \in \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{H}_\pi$ は π に附随する Hilbert space.

<u>Remark 1</u> $\{X_j\}_{1\leq j\leq p}$ を $\mathfrak{g}_1$ の base とした時, Hörmander (1967) により, $L = \sum_{j=1}^{p} X_j^2$ は準楕円性を持つことがわかっているが, この事は上の定理からもすぐ分かる。実際, $u \in \mathcal{S}_\pi$ に対し,

$$-(\pi(L)u, u) = \sum_{j=1}^{p} \|\pi(X_j)u\|^2$$

だから, $\pi(L)u = 0$ より $\pi(X_j)u = 0$ が従う。すると,

$$X_j(\pi_g u, u) = (\pi_g \pi(X_j)u, u) = 0 \quad \text{より}$$

$(\pi_g u, u)$ は g の関数として定数, よって

$$(\pi_g u, u) = (\pi_e u, u) = \|u\|^2 \quad \forall g \in G.$$

従って, $\pi_g u \equiv u$, 故に $u = 0$。

<u>Remark 2</u>　Gを1次Heisenberg群，即ち $\mathcal{U}_1(\mathfrak{g})$ の生成元は

$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}$,　$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \cong G$ とする.

$L = X^2 + Y^2 + \alpha[X, Y]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ を考える. ($[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z}$ である.)

$L \in \mathcal{U}_2(\mathfrak{g})$ であるから，上の定理が適用出来る. Heisenberg群の既約ユニタリ表現をSchrödinger表示すれば，$\forall\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$\pi_\lambda(L) = \partial_s^2 - s^2\lambda^2 + i\alpha\lambda$, $\mathcal{H}_{\pi_\lambda} = L^2(\mathbb{R}_s)$, $\mathcal{S}_{\pi_\lambda} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$: Schwartzの急減少関数空間 となるから，Hermite作用素 $-\partial_s^2 + s^2$ の固有値が $(2n+1)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ である事を使えば，結局,

『Lが準楕円性をもつ $\Leftrightarrow$ $\alpha \notin \{\pm(2n+1), n = 0, 1, 2, \cdots\}$』

である事がわかる.（有限次元既約ユニタリ表現については，定理の条件は今は $\forall\alpha$ に対してみたされている.）この結果は，1970年のGrushinの結果に対応するものである.

<u>Remark 3</u>　一般には，定理の(2)の条件を具体的に書き下すことは容易ではない。

次に一般の作用素の場合を考えよう. $L(\Omega)$をΩ上smooth実ベクトル場全体とする. 今 $\{X_j\}_{1\leq j\leq p}$ は $(CH)_r$ をみたしていると仮定し，$\mathfrak{g}$をgraded stratified Lie algebraでstep数rのもので

$\exists\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow L(\Omega)$ linear s.t. $\lambda(Y_j) = X_j$　$1 \leq j \leq p$

partial homomorphism of rank r : i.e. $\lambda([a_j, a_k]) = [\lambda(a_j), \lambda(a_k)]$, $a_j \in \mathfrak{g}_j$, $a_k \in \mathfrak{g}_k$, $j+k \leq r$ となるものが存在すると仮定する。ここで Y_j は $\mathfrak{g}_1$ のbaseである. [Lifting Theoremによれば少なくとも1つ存在する.]

この時 $P=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) X^\alpha$ なる形 ($a_\alpha\in C^\infty(\Omega)$) の作用素に対し、
$P_{x_0}=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0) Y^\alpha \in \mathcal{U}_m(\mathfrak{g})$ とおく。さすれば、問題は、$\hat{G}$ の部分集合 Γ_{x_0} で、次の性質を持つものを特徴付ける事である。

『$\forall\pi\in\Gamma_{x_0}$ $\pi(P_{x_0})$ が単射 $\Longleftrightarrow$ P が x_0 の近傍で準楕円性を持つ』

実際、Helffer-Nourrigat は 1985 年に出版された本の中で Γ_{x_0} の候補者を記述し、いくつかの場合に上の性質をもつことを示した。

$\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ 上の linear functional 全体、$\delta_t^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$, $\lambda_x^*:T_x^*\Omega\to\mathfrak{g}^*$ をそれぞれ δ_t, λ_x の transpose とする。Kirillov Theory によれば $\mathfrak{g}^*\subset\hat{G}$ とみなせる。即ち $l\in\mathfrak{g}^*$, $B_l(x,y)=l([x,y])$, $\mathcal{H}$ を B_l に関して maximal isotropic subalgebra of $\mathfrak{g}$ とすれば、

$\chi: e^a \longmapsto e^{i\langle l,a\rangle}$: $V=\exp\mathcal{H}$ 上のスカラー unitary 表現

$\pi_l=\pi_{(l,\mathcal{H})}$ は χ から誘導される G 上のユニタリ表現とすれば、π_l は既約である。この意味で Γ_{x_0} を次の様に定義する。

<u>定義</u>

$$
\Gamma_{x_0}=\Big\{ l\in\mathfrak{g}^* \,:\, \exists (t_n,x_n,\xi_n)\in\mathbb{R}^+\times T^*\Omega \ \text{s.t.}\ (t_n,x_n)\to(0,x_0)\ \text{as}\ n\to\infty,\ l=\lim_{n\to\infty}\delta_{t_n}^*\lambda_{x_n}^*\xi_n \Big\}
$$

P の準楕円性を示すには、超局所解析レベルで $T^*(\Omega)$ の精細な単位分解を用いて、X_j を $\pi_l(X_j)$ で近似するという手段を用いる。

<u>Remark 4</u> $x\in\Omega$ に対し

$$V_k(x)=\lambda_x(\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k),\ V_0(x)=0.$$

$$H_k(x)=\mathfrak{g}_k\cap\lambda_x^{-1}(V_{k-1}(x))$$

$$H(x)=\bigoplus_{k=1}^{r}H_k(x)$$

$$H(x)^{\perp}=\{\ell\in\mathfrak{g}^*,\ \ell(H(x))=0\}$$ とおけば、

一般に $H(x)^{\perp}\subset\Gamma_x$ だが、もし $\dim V_k(x)$ が locally constant, $k=1,\cdots,r$ ならば $\Gamma_x=H(x)^{\perp}$ である。

<u>Remark 5</u> $1\leq r\leq 2$ の場合は上の特徴付けは正しい。

§3 初期値問題

$$P=D_t^m+\sum_{j=1}^{m}A_j D_t^{m-j},\quad D_t=\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial t},\quad A_j(x,D_x)\ \mathbb{R}^n\text{上}\ j\text{階微分作用素}.$$

に対して、次の初期値問題を考える。

$$(C.P)\quad\begin{cases}Pu=f(x,t) & \text{in } U\ni(0,0)\\ \partial_t^j u(x,0)=g_j(x) & 0\leq j\leq m-1.\quad U\cap\{t=0\}=\Omega\end{cases}$$

この時 $(C.P)$ が原点 $(0,0)$ で C^∞-well-posed であるとは、任意の $f(x,t)\in C^\infty(U)$，任意の $g_j(x)\in C^\infty(\Omega)$ に対して、ある原点の近傍 D が存在して、

$$\begin{cases}Pu=f & \text{in } D\\ \partial_t^j u\big|_{t=0}=g_j & \text{on } D\cap\{t=0\}\end{cases}$$

の解 $u(x,t)\in C^\infty(D\cap\{t\geq 0\})$ が一意に存在する時を言う。

まず巾零リー群上の話から始めよう。

Theorem 1 $\mathfrak{g}$ を graded stratified Lie algebra, $A_j \in \mathcal{U}_j(\mathfrak{g})$ とする。この時 (C.P) が C^∞-well-posed ならば、$\forall \pi \in \hat{G}\setminus\{0\}$, $\forall \zeta \in \mathbb{C}$ s.t. $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$ に対して、

$$P_{\zeta,\pi} = \zeta^m + \sum_{j=1}^{m} \pi(A_j)\,\zeta^{m-j}$$

が $\mathcal{S}_\pi$ で単射でなければならない。

Proof) 結論を否定して、$\exists \pi \in \hat{G}\setminus\{0\}$, $\exists\, \mathrm{Re}(\sqrt{-1}\,\zeta) > 0$ s.t.

$$\ker P_{\zeta,\pi} \neq \{0\}$$

と仮定する。$v \in \ker P_{\zeta,\pi}\setminus\{0\}$ に対して

$$u(g,t) = (\pi_g v, v)\, e^{it\zeta}$$

とおけば $Pu(g,t) = (\pi_g P_{\zeta\pi} v, v) = 0$ をみたす。

一方 C^∞-well-posedness と Banach の closed graph Theorem により、ある原点の近傍 D_0 が存在して、任意のコンパクト部分集合 $K \subset\subset D_0$ に対し、ある定数 C_l が存在して、次の不等式が成り立つ。

$$\sup_K |u(g,t)|_0 \le C \sum_{j=0}^{m-1} \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(x,0)\right|_l \quad \text{for } \forall u \in C^\infty(D_0) \text{ s.t.}$$

$Pu = 0$, 但し $|\cdot|_l$ は $C^l(G)$ のノルムを表わす。

次に $\rho > 0$ をパラメーターとして、$u_\rho(g,t) = u \circ \delta_\rho$ を代入すれば、P の同次性より $\delta_\rho(P) = \rho^m P$, $\delta_\rho(e) = e$ だから、

$\exists \mu > 0$ $\exists N = N(l)$ に対して

$$e^{\mu\rho t}\,|(\pi_e v, v)| \le C \rho^N$$

が任意の $\rho > 0$ に対して成立する。故に $(\pi_e v, v) = 0 = \|v\|^2$ となり v の選び方に矛盾する。Q.E.D.

以下簡単の為に2階の場合のみを考えよう。すぐわかることは、一般に定理1の逆は不成立であることである。実際

Example 1　GをRemark 2で述べたHeisenberg群とし、

$$P = -\partial_t^2 + 2X\partial_t + Y^2 + \alpha[X, Y], \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

とすれば、これに対する(C.P)がC^∞-well-posedになるのは$\alpha=0$しかもその時に限ることは簡単な計算からすぐわかる。又、αが何であっても、任意の無限次元既約ユニタリ表現と、任意の$\zeta \in \mathbb{C}$ s.t. $\operatorname{Im}\zeta < 0$に対して$P_{\zeta,\pi}$は$\mathcal{S}_\pi$で単射であることも容易に知れる。従って、$\alpha \neq 0$の時は定理1の必要条件が成り立つにもかかわらず、$P$に対する(C.P)は$C^\infty$-well-posedにならないことになる。この点は準楕円性との大きな違いであり、似たような状況は、局所可解性の研究においても現われる。

そこで次の形の作用素を考えよう。

$$(3.1) \qquad P = -\partial_t^2 + \sum_{j=1}^{p} X_j^2 + T, \quad T\text{は1階作用素}$$

まず$\{X_j\}$がgraded stratified Lie group $\mathfrak{g}$の$\mathfrak{g}_1$のbasisの場合。

Theorem 2　(3.1)において$\{X_j\}_{1\le j\le p}$は$\mathfrak{g}_1$のbasis, $T \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$とし、$P$に対する(C.P)が$C^\infty$-well-posedならば、$T \in \mathcal{U}_2(\mathfrak{g}) \cup \mathcal{U}_1(\mathfrak{g})$でなければならない。

証明は定理1と同様に、結論を否定した時、Apriori評価を破る函数列を構成する事による。その際任意の$\pi \in \hat{G}\setminus\{0\}$に対して$\left\{\sum_{j=1}^{p} \pi(X_j)^2\right\}$がdiscrete spectrumのみを持つ事が効いてくる。

そこで低階Tとして、次の形のものを考えよう。

$$(3.2) \qquad T=\sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{p} c_{ij}\,[X_i, X_j]$$

ここで、$C=(c_{ij})=b+\sqrt{-1}\,a$, a, b は実skew-symmetric行列。

<u>Theorem 3</u> $\{X_j\}_{1\le j\le p}$ は $\mathfrak{g}_1$ の basis, T は(3.2)の形, C は定数行列。

この時、P:(3.1)に対する(C.P)が C^∞-well-posed ならば

$$a \in S=\{\text{実skew symmetric } p\text{次行列}(S_{jk}) : \sum S_{jk}[X_j, X_k]=0\}$$

かつ $$\sup_{\substack{\|\rho\|_{tr}\le 1\\ \rho\in S^\perp}} |tr(b\cdot\rho)| \le 1$$

但し、$S^\perp$ は実skew symmetric p次行列の空間における内積: $-tr(x\cdot y)$ に関する S の直交補空間をあらわす。但し tr はトレース, $\|\cdot\|_{tr}$ はトレースノルムをあらわす。

逆に $$a\in S \text{ かつ } \sup_{\substack{\|\rho\|_{tr}\le 1\\ \rho\in S^\perp}} |tr(b\cdot\rho)| < 1$$

ならば(C.P)は C^∞-well-posed である。

<u>Remark 6</u> 準楕円性に関するRothschild-Steinの結果と比べてみると、低階項Tに現われる係数Cの虚部に条件が付く所が異なるだけである。

次に一般の場合に、十分性の方を考えてみよう。(3.1)のPに対し

<u>Conjecture</u> $\{X_j\}_{1\le j\le p}$ は $(CH)_r$ をみたすとする。§2の記号で、$\forall \ell\in\Gamma_0$, $\forall \zeta\in\mathbb{C}$ s.t $\mathrm{Im}\,\zeta<0$ or $\zeta=0$ に対して P_{ζ,π_ℓ} が $\mathcal{S}_{\pi_\ell}$ で単射ならば、(C.P)は原点の近傍で C^∞-well-posed である。

実際いくつかの場合には正しいことがわかる。

この予想の subset 版として次の事は証明出来る。

<u>Theorem 4</u>　$\{X_j\}_{1\le j\le p}$ は $(CH)_r$ をみたし，(3.1), (3.2) で定義される P を考える．さらに係数行列 $C(x) = b(x) + \sqrt{-1}\,a(x)$ について次を仮定する．

1)　　$a(x) \in S$　if $x \in \Sigma = \{x : {}^\exists \xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0 \text{ s.t. } \sigma(X_j)(x, \xi) = 0, 1 \le {}^\forall j \le r\}$

かつ，${}^\exists \varepsilon > 0$ s.t.　各点 x で

2)
$$\sup_{\substack{\|\rho\|_{tr} \le 1 \\ \rho \in S^\perp}} |\mathrm{tr}\,(b(x) \cdot \rho)| \le 1 - \varepsilon$$

但し，S は，Free Nilpotent Lie Algebra $\mathcal{F}_{r,p}$ の generator $\{Y_j\}_{1\le j\le p}$ に対して

$$S = \{\text{実 skew-symmetric } (S_{jk}) : \sum S_{jk}[Y_j, Y_k] = 0\}$$

で決まる部分空間である。この時 P に対する (C.P) は局所的に C^∞-well-posed である。

この定理と予想との違いの意味する所を説明しよう．

<u>Example 2</u>　$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$，$X_2 = x^k \frac{\partial}{\partial y}$　$k \in \mathbb{N}$ に対して

$$P = -\partial_t^2 + X_1^2 + X_2^2 + i\alpha(x,y)[X_1, X_2] \quad \text{on } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{xy}$$

但し，$\alpha \in C^\infty$ real-valued とする．まず定理4によれば，P に対する (C.P) は，$|\alpha(x,y)| \le 1-\varepsilon$ なら C^∞-well-posed である．(${}^\exists\varepsilon>0$)．一方 k が奇数の時，定理1を使えば $|\alpha(x,y)| \le 1$ が必要条件として得られる。しかし k が偶数の時は必要条件としては，

$$|\alpha(x,y)| \le \frac{k+1}{k}$$

しか得られず，実際 $|\alpha(x,y)| \le \frac{k+1}{k} - \varepsilon$ なら C^∞-well-posed になる事は

予想の段階で始めて示されるのである。

定理4の証明はエネルギー不等式を示すことによる。その際、$\sum_{j=1}^{p}\|X_j u\|^2 \leq C\{\mathrm{Re}(Qu,u)+\|u\|^2\}$, $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, type の評価を、超局所解析を用いて、Qを巾零リー群上の作用素$\tilde{Q}$で近似して、$\tilde{Q}$についての類似の評価式から元の評価式を出す方法で行なう。

Remark 7　Rothschild-Steinでは基本解を構成する方法により、

$$\sum_{j=1}^{p}\|X_j u\|^2 \leq C\{|(Qu,u)|+\|u\|^2\},\ u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

という形の不等式を導いているが、この方法は今の場合適用出来ないと思われる。

参考文献

L. Hörmander, Hypoelliptic second order ……, Acta Math. 119 (1967), 147-171

L.P. Rothschild - E.M. Stein, Hypoelliptic …… nilpotent groups, Acta Math. 137 (1977), 248-315

B. Helffer - J. Nourrigat, Caractérisation des opérateurs ……, Comm. P.D.Eq. 4 (1979), 899-958

B. Helffer - J. Nourrigat, Hypoellipticité Maximale ……, 1985, Birkhäuser.

T. Ōkaji, Equations of evolution …… I, J. Math. Kyoto Univ. 32 (1992), 749-761

T. Ōkaji, Equations of evolution …… II, J Math. Kyoto Univ. 33 (1993),